**Министерство образования Республики Беларусь**

**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной математики и информатики**

Фурс Дмитрий Сергеевич

**Методы вычислений**

Отчет по лабораторной работе № 1,

Вариант 8

студента 2-го курса 12-ой группы

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | **Преподаватель** |
|  | **Мойса А.В.** |
|  | | |

**Минск 2019**

Оглавление

[Задание 1 3](#_Toc8145040)

[Задание 2 3](#_Toc8145041)

[Задание 3 3](#_Toc8145042)

[Задание 4 4](#_Toc8145043)

[Задание 5 4](#_Toc8145044)

[Задание 6 5](#_Toc8145045)

[Задание 7 5](#_Toc8145046)

[Задание 8 6](#_Toc8145047)

[Задание 9 6](#_Toc8145048)

[Задание 10 7](#_Toc8145049)

[Результаты 8](#_Toc8145050)

# Задание 1

Для получения необходимого количества значащих цифр использовал функцию из стандартного модуля random – random.uniform(a,b), которая возвращает число с плавающей точкой x, a <= x <= b. Заполнение матрицы происходит последовательно по строкам (два цикла), при нахождении ij-го элемента это же значение присваиваем ji-ому элементу. Далее высчитываем диагональные элементы как сумму модулей элементов соответствующей строки. Аналогично с помощью random генерируем вектор y, и умножаем полученную матрицу на y. Результатом умножения будет вектор столбец правой части – b.

# Задание 2

Был реализован стандартный алгоритм метода Гаусса-Жордана (с выбором по столбцу), который представляет собой модификацию метода Гаусса (вместо вектора правой части b имеем единичную матрицу). Для нахождения обратной матрицы сгенерированную матрицу A (256\*256) дополнял до прямоугольной (добавлял к ней справа единичную) размером (256\*512) и запускал для построенный матрицы метод Гаусса-Жордана. Число обусловленности находил как произведение l-норм исходной и обратной матриц. Полученное среднее число обусловленности для 100 прогонок ~ 4.705462758589952, что соответствует результатам большинства человек из группы.

# Задание 3

Рационально подобранный язык реализации избавил от лишних проблем при перестановке строк/столбцов (замена строк производиться в одну строчку a[i],a[j] = a[j],a[i] , а при перестановке столбцов менял местами соответствующие компоненты вектора перестановок), чего нельзя сказать о времени решения(примерно 21 минута в идеале для прогонки 100 матриц по всем заданиям). К матрице системы справа добавлял вектор столбец b. На каждой итерации алгоритма находил максимальный элемент среди рассматриваемых (если k- номер итерации, то среди элементов ij, где i,j от k до n (n-1 в реализации). Менял местами текущую строку/столбец с выбранными и осуществлял прямой ход метода Гаусса. Сделав обратный ход, переставлял местами компоненты полученного вектора решений в соответствии с вектором перестановок. Использовав выбор главного элемента по матрице, мы попытались максимально не испортить исходную систему (минимизировать число обусловленности конечной матрицы). Как следствие получили довольно точный результат – порядка . Как уже отмечалось в Задании 2, метод Гаусса-Жордана представляет собой модификацию метода Гаусса. Время решение СЛАУ по методу Гаусса почти в два раза меньше, чем время, затрачиваемое на нахождение обратной матрицы по Гауссу-Жордану. Связано это с тем, что в Гауссе справа мы имеем только один вектор правой части b, а в методе Гаусса-Жордана – матрицу.

# Задание 4

LUP разложение было построено с выбором главного элемента по столбцу. Фактически представляет собой немного изменённый метод Гаусса. После построения получаем матрицу LU, где U – верхнетреугольная (как в Гауссе), а L - нижнетреугольная с единицами на главной диагонали (поэтому их не храним). По аналогии с Гауссом выбираем главный элемент по столбцу и меняем местами строки. Сравнив полное время LUP – разложения с временем Гаусса заметим, что на LUP потратили меньше времени (так как выбирали только по столбцу). Точность порядка . LUP-разложение используется для эффективного решения систем с одной и той же матрицей А, так как при этом мы один раз строим LU-разложение, а потом просто решаем все системы за (LUx=Pb ⬄ Ly=Pb, Ux = y, где P – матрица перестановки, т.е. сначала прямой подстановкой находим y, затем находим решение исходной системы x обратной подстановкой).

# Задание 5

Метод квадратного корня применим для решения СЛАУ с симметричными вещественными матрицами, у которых все главные угловые миноры отличны от нуля. Системы с симметричными матрицами довольно часто встречаются на практике, и существуют специальные методы для решения таких систем (учитывая свойство симметрии). Суть этих методов заключается в том, что после очередной итерации метода Гаусса, мы вновь получаем симметричную матрицу (за исключением первых k строк и столбцов), а значит прямой ход Гаусса можно выполнить практически в два раза быстрее (нужно ещё считать диагональ), вычисляя на каждом шаге только элементы верхнего или нижнего треугольника + диагональ. Таким образом мы получим разложение, где L - нижнетреугольная матрица с единичной главной диагональю, D – диагональная матрица (можно выполнить LU-разложение, а так как и у L – единичная главная диагональ, получим, что D – это главная диагональ U). Матрицу D можно представить в виде D = HEH, где H, E – диагональные матрицы, h[i][i] = sqrt(|d[i][i]|), e[i][i] = sign(d[i][i]). Если обозначить G = LH, то получим разложение , где G – нижнетреугольная матрица, E – диагональная матрица, элементы которой по модулю равны 1. Построив такое разложение, решаем далее аналогично LUP. Точность порядка . Практически в два раза быстрее LUP - разложения и в 9 раз быстрее Гаусса. Однако стоит помнить, что применим данный метод только для решения определенных СЛАУ.

# Задание 6

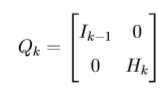
Метод релаксации является одним из наиболее эффективных и широко используемых итерационных методов для решения СЛАУ с симметричными положительно определёнными матрицами. Довольно простой для реализации метод. А тот факт, что для реализации классических итерационных процессов мы используем только скалярные формы (векторные только для анализа сходимости) делает его самым приятным для написания методом. Основная формула:



Где w – весовой коэффициент (обычно принадлежит (0,2)), x c волной – решение, полученное по методу Гаусса-Зейделя. При w=1 метод релаксации превращается в метод Гаусса-Зейделя. Точность порядка . По времени близок к методу квадратного корня. Отмечу, что если A - симметричная положительно определенная матрица, то этот метод сходится для всех w из (0,2). В нашем случаем достигнута хорошая сходимость, так как сгенерированная матрица близка к той, для которой метод идеально подходит.

# Задание 7

Задача прежняя – решаем Ax = b, но теперь чтобы А привести к верхнетреугольному виду вместо элементарных преобразований применяем преобразования отражения. В настоящее время метод отражений является одним из наиболее устойчивых к вычислительным погрешностям методом. Суть заключается в том, что мы матрицу системы можем представить в виде произведения ортогональной и верхнетреугольной матриц (A = QR).

Матрица Qk имеет вид:

Где I – единичная, а H – матрица отражений, которая полностью определяется вектором нормали w. При реализации не будем в явном виде строить Q, а будем сохранять только вектора w, которые определяет преобразование отражения, и хранить их в одной матрице вместе с получаемой верхнетреугольной R, а диагональ R хранить в виде вектора. Тогда остаётся просто найти R, а потом применить последовательно к столбцу правой части b те же преобразования (определяемые векторами w). Точность порядка . Время – быстрее чем Гауссом почти в 1,5 раза (связано это с выбором главного элемента в Гауссу). Теоретически трудоёмкость прямого хода метода отражений в два раза больше, чем у метода Гаусса. Достоинство метода заключается в том, что ортогональные преобразования не меняют число обусловленности матрицы.

# Задание 8

“Обрежем” нашу матрицу системы А. Решение системы теперь будет существовать только тогда, когда вектор правой части будет принадлежать линейной оболочке системы векторов столбцов матрицы А. Но можно поставить задачу по-другому – искать такой вектор x, который минимизировал бы норму невязки Ax-b:

Получим линейную задачу наименьших квадратов. Аx по условию должен быть проекцией вектора b на подпространство V, где V - линейная оболочка системы векторов столбцов матрицы А, т.е. невязка должна быть ортогональна каждому базисному вектору подпространства V: 

Получим решение задачи наименьших квадратов с помощью нормальных уравнений:

Средняя максимум-норма разности 11512.422. Запуск на вариантах одногруппников (в частности Кирилла Желтовского и Александра Райя) дал результаты, которые соответствуют их собственным. Время 1,25 с. Так как полученная матрица системы является симметричной и положительно определённой, для решения нормальных уравнений лучше использовать метод квадратного корня, но при этом получим менее точное решение, чем по Гауссу (возможно из-за вычисления квадратных корней). Поэтому для решения последней системы использовал метод Гаусса.

# Задание 9

Суть обобщённого метода минимальных невязок (GMRES) для решения СЛАУ состоит в следующем: на каждой итерации (пусть её номер – k) мы ищем в подпространстве Крылова Kk (A, b), где 

, приближённое решение xk, имеющее минимальную норму невязки ||Axk – b||2.

Если обозначить xk = x, то получим





а вектор с найдём, решив задачу наименьших квадратов



Столбцы матрицы K будем вычислять последовательно на каждой итерации, предварительно инициализировав первый столбец вектором b.

Достоинство метода заключается в том, что он применим ко всем матрицам.

Заметим, что, решая таким образом, мы получим не очень точное решение (порядка 10-6) из-за плохой обусловленности матрицы Kk, но при этом найдём его довольно быстро. Объясняется полученная точность тем, что в матрице Kk столбцы могут быть линейно зависимы. Попытаемся это исправить в следующем методе.

# Задание 10

Отличие от обычного GMRES заключается в том, что мы вместо столбцов матрицы Kk для разложения искомого вектора x будем использовать ортонормированный базис пространства Крылова Kk (A, b). Векторы этого базиса обозначим qj, а матрицу, составленную из этих столбцов, обозначим Qk.

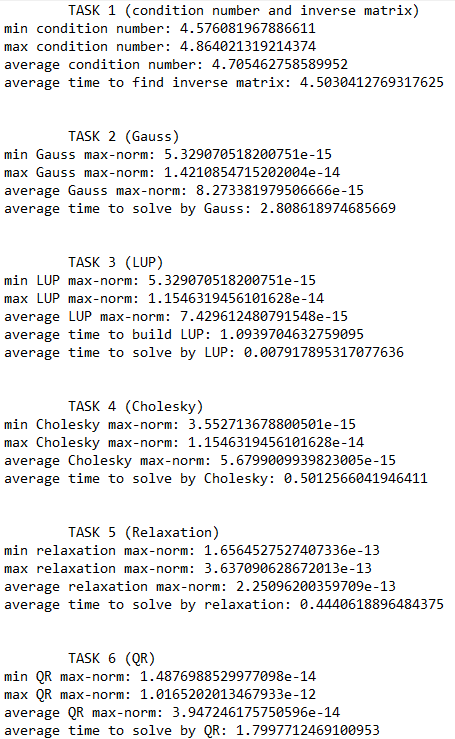
Тогда вместо xk = Kk \* c будем иметь xk = Qk \* y, где y – вектор коэффициентов разложения по базису {qj} и тогда будем решать задачу минимизации:



Будем проводить ортогонализацию векторов на каждой итерации.

Как следствие получим более точное решение (порядка 10-14) за практически такое же время (0,14с против 0,10с обычным GMRES).

# Результаты



# 